Teil I: Stoffgebiete der Mittelstufe

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ $\qquad$ $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)$

Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Lösungsformel für die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Potenzen und Wurzeln

$a^0 = 1$ $\qquad$ $a^1 = a$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad$ $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ $\qquad$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\qquad$ $\left(a^x\right)^z = a^{x \cdot z}$

$a^x \cdot a^z = a^{x+z}$ $\qquad$ $\frac{a^x}{a^z} = a^{x-z}$ $\qquad$ $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ $\qquad$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ $\qquad$ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Geradengleichung

$f(x) = mx + t;$

Punkt-Steigungsform: $\quad f(x) = m\cdot(x - x_0) + y_0$

Schnittwinkel zweier Geraden

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

Parabelgleichung

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ (allgemeine Form)

$f(x) = a\cdot(x - x_s)^2 + y_s$ $\qquad$ (Scheitelform)

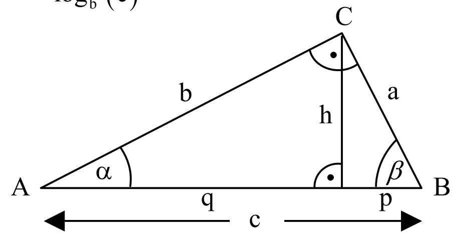
$f(x) = a\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)$ $\qquad$ (Linearfaktorform)

Logarithmen

$\log_b(u\,v) = \log_b(u) + \log_b(v)$ $\qquad$ $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)$

$\log_b\left(u^z\right) = z\cdot\log_b(u)$ $\qquad$ $\log_c(a) = \frac{\log_b(a)}{\log_b(c)}$

Rechtwinkliges Dreieck



Pythagoras: $\quad a^2 + b^2 = c^2$

Höhensatz: $\quad h^2 = p\,q$

Kathetensatz: $\quad a^2 = c\,p;\ \ b^2 = c\,q$

$\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \cos\alpha = \frac{b}{c};\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$

Allgemeines Dreieck

Sinussatz: $\quad a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

Kosinussatz: $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

Sinus und Kosinus

$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$

$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ $\qquad$ $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

$\sin(90° - \varphi) = \cos\varphi$ $\qquad$ $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ $\qquad$ $\cos 2\varphi = (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2$

$(\sin\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{1}{2}\cdot(1-\cos\varphi)$ $\qquad$ $(\cos\frac{\varphi}{2})^2 = \frac{1}{2}\cdot(1+\cos\varphi)$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Flächengeometrie

Allgemeines Dreieck: $A = \frac{1}{2}g\,h$ $\qquad$ Trapez: $A = \frac{a+c}{2}h$

Gleichseitiges Dreieck: $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ $\qquad$ Kreis: $U = 2r\pi$; $A = r^2\pi$

Raumgeometrie

Prisma: $V = G\,h$

Pyramide: $V = \frac{1}{3}G\,h$

gerader Kreiszylinder: $V = r^2\pi h$; $M = 2r\pi h$

gerader Kreiskegel: $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$; $M = r\pi m$

Kugel: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$; $O = 4r^2\pi$

Teil II: Analysis

Grenzwerte

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x} = 0$; $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^r} = 0$; $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^r\cdot\ln x\right) = 0$ $\qquad$ (jeweils $r > 0$)

Definition der Ableitung

Ableitung: $\qquad f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

falls der Grenzwert existiert und endlich ist.

Schreibweisen: $\qquad f'(x) = y' = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$; $\qquad \frac{ds(t)}{dt} = \dot{s}(t)$

Ableitung der Grundfunktionen

$(x^r)' = r\;x^{r-1}$ $\qquad$ $(\frac{1}{x^r})' = -\frac{r}{x^{r+1}}$ $\qquad$ $(e^x)' = e^x$ $\qquad$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Ableitungsregeln

Summenregel: $\qquad f(x) = u(x) + v(x) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel: $\qquad f(x) = c\cdot u(x) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = c\cdot u'(x)$

Produktregel: $\qquad f(x) = u(x)\cdot v(x) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

Quotientenregel: $\qquad f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

Kettenregel: $\qquad f(x) = u\left(v(x)\right) \quad\Rightarrow\quad f'(x) = u'\left(v(x)\right)\cdot v'(x)$

L`Hospitalsche Regeln

- Gilt z(a) = n(a) = 0 und existiert $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{z'(x)}{n'(x)}$, so gilt $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{z(x)}{n(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{z'(x)}{n'(x)}$
- Gilt $|z(x)|\to\infty$ und $|n(x)|\to\infty$ für $x\to a$ und existiert $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{z'(x)}{n'(x)}$,

  so gilt $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{z(x)}{n(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{z'(x)}{n'(x)}$
- Beide Regeln gelten in ähnlicher Weise auch für $|x|\to\infty$ (anstelle von $x\to a$)

Anwendungen der Differenzialrechnung

- Gleichung der Tangente im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$: $y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$
- Monotoniekriterium:

  $f'(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f fällt streng monoton in I.

  $f'(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ f steigt streng monoton in I.
- Art von Extremwerten (mithilfe der zweiten Ableitung):

  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Minimum.

  $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ f hat an der Stelle x_0 ein relatives Maximum.
- Graphenkrümmung:

  $f''(x) < 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I rechtsgekrümmt.

  $f''(x) > 0$ im Intervall I $\Rightarrow$ G_f ist in I linksgekrümmt.
- Wendepunkt:

  Ist $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.
- Terrassenpunkt:

  Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ und wechselt f'' an der Stelle x_0 das Vorzeichen, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Terrassenpunkt.

Newtonsche Iterationsformel

zur näherungsweisen Berechnung von Nullstellen: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems

$f(-x) = f(x)$ für alle $x\in D$ $\Leftrightarrow$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse
(f heißt dann *gerade Funktion*)

$f(-x) = -f(x)$ für alle $x\in D$ $\Leftrightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung
(f heißt dann *ungerade Funktion*)

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

1) Ist f eine in [a; b] stetige Funktion, so ist
   - die Integralfunktion $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ differenzierbar
   - und F_a ist eine Stammfunktion von f, d.h. $F_a'(x) = f(x)$.

2) Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b$.

Partielle Integration

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

Integration durch Substitution

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt \quad \text{mit } x = g(t)$$

Uneigentliche Integrale

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad := \quad \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Volumen eines Rotationskörpers bei Rotation um die x-Achse

$$V = \pi \cdot \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx$$

Wichtige unbestimmte Integrale

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \ln x\,dx = -x + x\ln x + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \qquad \int f'(x)\cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, wobei F Stammfunktion von f ist.

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \qquad \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad \textbf{(Kreisintegral)}$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

Teil III: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Gesetze der Mengenalgebra: $\overline{A} = \Omega \setminus A$; $\quad A \cup \overline{A} = \Omega$; $\quad A \cap \overline{A} = \{\ \}$;
$\overline{\overline{A}} = A$; $\quad A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Gesetze von De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Unvereinbarkeit: $A \cap B = \{\ \}$

Ereigniswahrscheinlichkeiten: $P(\{\ \}) = 0$; $P(\Omega) = 1$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Satz von Sylvester: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Unabhängigkeit von zwei Ereignissen: $P_A(B) = P(B)$
oder auch: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Elemente in einer Reihe anzuordnen.

Binomialkoeffizient: $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$
Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit n Elementen Teilmengen mit k Elementen zu bilden.

Laplace-Experiment: Alle Elementarereignisse des zugehörigen Ergebnisraumes sind gleich wahrscheinlich.
Es gilt dann: $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$

Zufallsgrößen – Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Die Zufallsgröße X nehme die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ an. Dann gilt:

- **Erwartungswert:** $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$
- **Varianz:** $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot p_i$
  $= (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - \mu)^2 \cdot p_n$

  Verschiebungsregel: $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$
- **Standardabweichung:** $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Binomialverteilung

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Treffer in einer Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p.
Dann heißt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung „***Binomialverteilung***".
X heißt binomialverteilt, genauer B(n; p)-verteilt.

Ist die Zufallsgröße X binomialverteilt nach B(n; p), so gilt:

$$P(X = k) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n$$

mit Erwartungswert $E(X) = n \cdot p$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Hypothesentest

Beim Testen der Nullhypothese H_0 im Signifikanztest können zwei Fehler auftreten:

Fehler 1. Art: H_0 wird abgelehnt, obwohl sie wahr ist.
Fehler 2. Art: H_0 wird angenommen, obwohl sie falsch ist.

Als „***Signifikanzniveau***" α des Tests bezeichnet man die größtmögliche noch akzeptierte Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art.

Normalverteilung

Dichtefunktion: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

Standardisierung:

Dichtefunktion: $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}u^2}$

Verteilungsfunktion: $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$

Es gilt: $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$

Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung
(brauchbar für $n \cdot p \cdot (1-p) > 9$)

$$B(n; p; k) \approx \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{mit } \mu = n \cdot p \text{ und } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

$$F(x) \approx \Phi\left(\frac{x - \mu + \frac{1}{2}}{\sigma}\right)$$

Teil IV: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot v_1 + a_{12} \cdot v_2 + a_{13} \cdot v_3 \\ a_{21} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + a_{23} \cdot v_3 \\ a_{31} \cdot v_1 + a_{32} \cdot v_2 + a_{33} \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Eigenschaften und Anwendungen des Skalarprodukts

- zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $0^\circ \le \varphi \le 180^\circ$

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Eigenschaften und Anwendungen des Vektorproduktes

- $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ mit $0^\circ \le \varphi \le 180^\circ$
- Flächeninhalt F des Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$
- Volumen V der dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \circ \left(\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right) \right|$

Lineare Unabhängigkeit

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$ nur mit $\lambda = \mu = \nu = 0$ lösbar ist.

Alternativ gilt: $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \circ \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq 0$

Gerade im $\mathbb{R}^3$

- Punkt-Richtungsform: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$
- Zwei-Punkte-Form $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Ebene im $\mathbb{R}^3$

Parameterformen

- Punkt-Richtungsform: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- Drei-Punkte-Form: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \mu \cdot (\vec{c} - \vec{a})$

Parameterfreie Formen

- Koordinatenform: $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$
- Achsenabschnittsform: $E: \dfrac{x_1}{s} + \dfrac{x_2}{t} + \dfrac{x_3}{u} = 1$

  Festlegung durch die Achsenschnittpunkte S(s| 0| 0), T(0| t| 0) und U(0| 0| u)
- Normalenform: $E: \vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$